3 Rektifikacione krive i dužina luka. Prirodna parametrizacija krive.

U ovoj lekciji želimo da uvedemo koncept dužine luka krive. Ideja je da aproksimiramo krivu uz pomoć uzastopno upisanih nadovezanih duži (poligonalnih linija), tehniku koju smo naučili iz analitičke geometrije. Intuicija nam govori da dužina poligonalne linije (uzastopno upisanih nadovezanih duži) nebi trebala biti duža od dužine krive (s obzirom da je prava linija najkraći put između dvije tačke), iz čega bi mogli naslutiti da će dužina krive biti jednaka gornjoj granici skupa dužina svih mogućih poligonalnih linija. Prema tome, izgleda da možemo, na prirodan način definisati dužinu krive kao najmanja gornja granica dužina svih mogućih poligonalnih linija.

Za većinu krivih koje se pojavljuju u praksi, ovo nam daje korisnu definiciju dužine luka. Kakogod, kao što ćemo vidjeti, postoje krive za koje nije moguće naći gornju granicu dužina upisanih poligonalnih linija. Prema tome, javlja se potreba da klasificiramo krive u dvije kategorije: one koje imaju dužinu i one koje nemaju. Prve zovemo *rektifikacione krive*, dok one krive koje nemaju dužinu zovemo *nerektifikacione*.

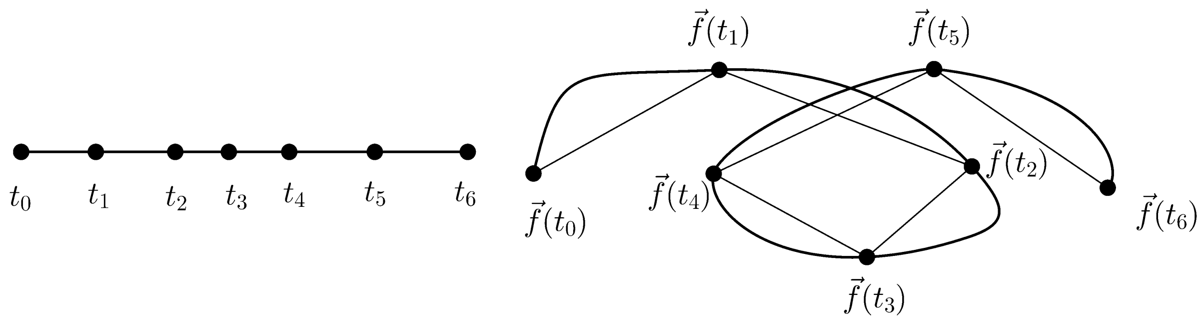
Sljedeće što želimo je da formalno opišemo ovu ideju. Neka je $\vec{f}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$$t\longrightarrow(x(t),y(t),z(t))$$

data kriva u prostoru. Za svaku podjelu intervala $[a,b]$ datu sa

$$P=\{t_0,t_1,...,t_m\},\ a=t_0<t_1<...<t_m=b$$

tačke $\vec{f}(t_0)$, $\vec{f}(t_1)$, ..., $\vec{f}(t_m)$, predstavljaju vrhove upisane poligonalne linije.



Dužinu ove poligonalne linije ćemo označiti sa duž$_{\vec{f}}(P)$ i definisati kao sumu

$$\text{duž}_{\vec{f}}(P)=\sum_{k=1}^{m}|\vec{f}(t_k)-\vec{f}(t_{k-1})|$$

Ako je skup brojeva duž$_{\vec{f}}(P)$ za svaku podjelu P intervala $[a,b]$ ograničen, tada za krivu $\vec{f}$ kažemo da je *rektifiktabilna* na $[a,b]$ i njezina dužina luka, koju ćemo označavati sa s, definišemo sa

$$s=\sup\{\text{duž}_{\vec{f}}(P):P\in\mathcal{P}[a,b]\},$$

gdje je $\mathcal{P}[a,b]$ skup svih mogućih podjela intervala $[a,b]$. Ako skup brojeva duž$_{\vec{f}}(P)$ nije ograničen, za $\vec{f}$ kažemo da je *nerektifiktabilna*.

25. Koristeći isključivo definiciju, ispitati da li kriva $\vec{x}=t\vec{e}_1+t^2\vec{e}_2$ na intervalu $[0,1]$ ima dužinu, ako su $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ i $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$. [duž$_{\vec{x}}(P)\leq 3$]

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadata jednačinom (parametarskom vektorskom obliku)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

ili u parametarskom skalarnom obliku

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),$$

tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_0 do tačke sa parametrom t_1 data formulom

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\mathrm{d}t$$

(primjetimo da je $\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}s$ krivoliniski integral prve vrste (poznat iz Analize III)).

26. Napisati parametarski oblik jednačine krive

$$4ax = (y+z)^2;\ 4x^2 + 3y^2 = 3z^2$$

i naći dužinu drive od tačke $O(0,0,0)$ do proizvoljne tačke A krive.

[$x = at^2, y = a(t - \frac{1}{3}t^3), z = a(t + \frac{1}{3}t^3)$; $s = \sqrt{2}y$ gdje je y koordinata tačke A]

27. Izračunati dužinu luka s krive $\vec{r} = e^t(\cos t, \sin t, 0)$, od tačke 0 do tačke sa parametrom t. Poslije toga iz formule za dužinu luka s, parametar t izraziti preko s.

[$s = \sqrt{2}(e^t - 1)$; $t = \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})$]

Do sada smo neku krivu $\vec{r}$ obično parametrizirali pomoću parametra t. Parametrizaciju možemo uraditi i pomoću dužine luka krive od neke tačke sa parametrom 0 do tačke sa parametrom λ - parametrizaciju dužinom luka. Ovakvu parametrizaciju zovemo *prirodna parametrizacija*.

28. Napisati jednačinu krive $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ izrazivši $\vec{r}$ kao funkciju argumenta luk s. Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente u proizvoljnoj tački.

[$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; b)$]

29. Data je kriva $C : \vec{r} = (a\cos t, a\sin t, a\ln\cos t)$. Napisati jednačinu te krive uvodeći kao argument luk s.

[$\vec{r} = a(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}; \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} - 1; \ln\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}})$]

30. Posmatrajmo krivu c datu implicitno sa

$$\vec{r}: \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1 \\ a\sqrt{b^2 - c^2}z = c\sqrt{a^2 - b^2}x \end{cases}$$

gdje su $a > b > c$. Izračunati njenu dužinu luka i nađite reparametrizaciju dužinom luka.

[$s = bt$; $\vec{r}(s) = (\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\frac{s}{b}, b\sin\frac{s}{b}, \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\frac{s}{b})$]

(#) Koristeći isključivo definiciju, ispitati da li kriva $\vec{x} = t\vec{e_1} + t^2\vec{e_2}$ na intervalu $[0,1]$ ima dužinu, ako su $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$ i $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$.

Rj. Napravimo podjelu P intervala $[0,1]$

$$P = \{\underset{\overset{\parallel}{0}}{t_0}, t_1, t_2, \dots, \underset{\overset{\parallel}{1}}{t_n}\}$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$$

dužinu poligonalne linije krive $\vec{x}$ za podjelu P računamo

$$\text{duž}_{\vec{x}}(P) = \sum_{i=0}^{n-1} |\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i+1})| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} |(t_i\vec{e_1} + t_i^2\vec{e_2}) - (t_{i+1}\vec{e_1} + t_{i+1}^2\vec{e_2})| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} |(t_i - t_{i+1})\vec{e_1} + (t_i^2 - t_{i+1}^2)\vec{e_2}| =$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} |t_i - t_{i+1}|\underbrace{|\vec{e_1}|}_{=1} + |t_i^2 - t_{i+1}^2|\underbrace{|\vec{e_2}|}_{=1} = \quad \Big| \; 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[(t_{i+1} - t_i) + (t_{i+1}^2 - t_i^2)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\left[1 + \underbrace{t_{i+1}}_{\leq 1} + \underbrace{t_i}_{\leq 1}\right] \leq 3\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = 3$$

Dužina poligonalne linije krive $\vec{x}$ za proizvoljnu podjelu P je ograničena odozgo sa 3, što znači da $\exists \sup\{\text{duž}_{\vec{x}}(P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$.

(#) Napisati parametarski oblik jednačine krive

$$4ax=(y+z)^2;\ 4x^2+3y^2=3z^2$$

i naći dužinu krive od tačke $O(0,0,0)$ do proizvoljne tačke krive.

R.:

$$C:\begin{cases}4ax=(y+z)^2\\ 4x^2+3y^2=3z^2\end{cases}$$

Krive u ravni se mogu parametrizovati pomoću familija krugova, familije pravih, familije parabola, bilo koje familije krivih koje imaju "jednostavni" oblik

Jednačina $4ax=(y+z)^2$ sugeriše smjenu $x=at^2$.

$$4a\cdot at^2=(y+z)^2$$

$$4a^2t^2=(y+z)^2 \implies y+z=2at$$

Dok se iz druge jednačine $4x^2+3y^2=3z^2$ dobija

$$4x^2=3(z^2-y^2)$$

$$4a^2t^4=3(z-y)(z+y) \xRightarrow{y+z=2at} 3(z-y)\,2at=4a^2t^4 \quad /:2at\cdot 3\ (t\neq 0)$$

$$z-y=\frac{2}{3}at^3$$

$$\begin{array}{l} y+z=2at\\ y-z=-\frac{2}{3}at^3\\ \hline 2y=2at\left(1-\frac{1}{3}t^2\right)\end{array}$$

$$y=at\left(1-\frac{1}{3}t^2\right)$$

$$y=a\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)$$

$$\begin{array}{l} y+z=2at\\ +\ z-y=\frac{2}{3}at^3\\ \hline 2z=2a\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)\end{array}$$

Prema tome

$$C:\begin{cases}x=at^2\\ y=a\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)\\ z=a\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)\\ -\infty<t<+\infty\end{cases}$$

Ako je kriva data u parametarskom obliku $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_0 do tačke sa parametrom t_1 data formulom:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

krivolinijski integral prve vrste

$$\dot{x} = 2at, \quad \dot{y} = a(1-t^2), \quad \dot{z} = a(1+t^2)$$

Pronađimo dužinu luka od tačke $O(0,0,0)$ do proizvoljne tačke recimo $A(a\lambda^2; a(\lambda + \frac{1}{3}\lambda^3); a(\lambda - \frac{1}{3}\lambda^3))$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$s = \int_0^\lambda \sqrt{4a^2t^2 + a^2(1-t^2)^2 + a^2(1+t^2)^2}\, dt = \int_0^\lambda \sqrt{4a^2t^2 + a^2(1 \underline{-2t^2} + t^4 + 1 \underline{+2t^2} + t^4)}\, dt$$

$$= a\int_0^\lambda \sqrt{4t^2 + 2 + 2t^4}\, dt = a\sqrt{2}\int_0^\lambda \sqrt{\underbrace{t^4 + 2t^2 + 1}_{(t^2+1)^2}}\, dt = a\sqrt{2}\int_0^\lambda (t^2+1)\, dt$$

$$= a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}t^3\Big|_0^\lambda + t\Big|_0^\lambda\right) = a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\lambda^3 + \lambda\right) \quad \Rightarrow \quad s = a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\lambda^3 + \lambda\right)$$

Dužina luka od tačke O do tačke A je $\sqrt{2}\,y$ gdje je y koordinata tačke A.

(#) Izračunati dužinu luka s krive $\vec{r}=e^t(\cos t, \sin t, 0)$, od tačke 0 do tačke t. Poslije toga iz formule za dužinu luka s, parametar t izraziti preko s.

Rj. Dužina luka krive od tačke 0 do λ se računa po formuli

$$s=\int_0^\lambda dS = \int_0^\lambda \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

U našem slučaju $\dot{x}=(e^t\cos t)' = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t-\sin t)$

$$\dot{y}=(e^t\sin t)' = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t+\cos t)$$

$$\dot{z}=0$$

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = e^t\sqrt{\cos^2 t - \cancel{2\sin t\cos t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\sin t\cos t} + \cos^2 t} =$$

$$= e^t\sqrt{2}$$

$$s=\int_0^\lambda dS = \int_0^\lambda e^t\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,e^t\Big|_0^\lambda = \sqrt{2}(e^\lambda-1)$$

$$s=\int_0^t dS = \sqrt{2}(e^t-1)$$

Dužina luka od 0 do t je $s=\sqrt{2}(e^t-1)$.

$$e^t-1=\frac{1}{\sqrt{2}}s$$

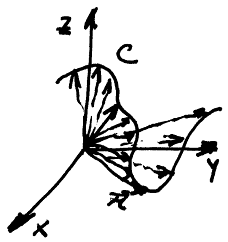
$$e^t=\frac{s}{\sqrt{2}}+1$$

$t=\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ parametar t izražen preko dužine luka s.

Napisati jednačinu krive $\vec{r}=(a\cos t, a\sin t, bt)$ izrazivši $\vec{r}$ kao funkciju argumenta luk s. Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente u proizvoljnoj tački.

Rj.

$C: \vec{r}=(a\cos t; a\sin t; bt)$



$$\boxed{s=\int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt}$$

krivol. integral prve vrste

dužina luka krive $C: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t_0\le t\le t_1 \end{cases}$ od tačke t_0 do t_1

Kako je $ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ tj. u našem slučaju

$\dot{x}=-a\sin t$

$\dot{y}=a\cos t$

$\dot{z}=b$

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$s=\int_0^{\lambda} ds=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\lambda} dt$$

uzmimo dužinu luka od 0 do neko $\lambda\in\mathbb{R}$

$$s=\sqrt{a^2+b^2}\; t\Big|_0^{\lambda} \xrightarrow[\text{za } t_0=t]{\text{za to računamo od } 0} \lambda=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}=t$$

ako umjesto λ stavimo param. t

$$\vec{r}=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$\vec{r}$ kao f-ja čiji je argument luk s

$$\boxed{\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{vektor tangente}}$$

$$\vec{t}=\left(a\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}; a\left(\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\vec{t}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; b\right)$$

ako izračunamo $|\vec{t}|$ primijetićemo da smo dobili $|\vec{t}|=1$.

#) Data je kriva $C: \vec{r} = (a\cos t,\ a\sin t,\ a\ln\cos t)$.
Napisati jednačinu te krive uvodeći kao argument luk s.

Rj. Dužina luka krive od tačke sa parametrom 0 do tačke sa parametrom λ data je formulom

$$s = \int_0^\lambda ds$$ ← krivolinijski integral prve vrste

$$\dot{x} = -a\sin t$$
$$\dot{y} = a\cos t$$
$$\dot{z} = \frac{a}{\cos t}\cdot(-\sin t)$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$ds = a\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}$$

$$s = \int_0^\lambda \frac{a}{\cos t}\,dt = a\int_0^\lambda \frac{dt}{\cos t} =$$ | želimo izraz $\frac{1}{\cos t}$ napisati kao zbir dva razlomka |

$$= a\int_0^\lambda \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)\cos x}\,dx = a\int_0^\lambda \frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x}{(1+\sin x)\cos x}\,dx$$

$$= a\int_0^\lambda \frac{\cos^2 x+\sin x(1+\sin x)}{(1+\sin x)\cos x}\,dx = a\int_0^\lambda\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$= a\int_0^\lambda \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x} + a\int_0^\lambda \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = \left(a\ln|1+\sin x| - a\ln\cos x\right)\Big|_0^\lambda$$

$$= a\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\Big|_0^\lambda = a\ln\left|\frac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda}\right|$$

Dobili smo $s = a\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|$ (ako umjesto parametra λ stavimo parametar t)

$$\frac{s}{a} = \ln\frac{1+\sin t}{\cos t}$$

$$e^{\frac{s}{a}} = \frac{1+\sin t}{\cos t}$$

$$\operatorname{ch}\frac{s}{a} = \frac{e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}}{2}$$

U našem slučaju

$$e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}} = \frac{1+\sin t}{\cos t}+\frac{\cos t}{1+\sin t} = \frac{\overbrace{(1+\sin t)^2+\cos^2 t}^{1+2\sin t+\sin^2 t}}{\cos t\,(1+\sin t)}$$

$$\frac{e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}}{2} = \frac{2\,(1+\sin t)}{2\cos t\,(1+\sin t)} = \frac{1}{\cos t}$$

Prema tome $\cos t = \dfrac{1}{\frac{e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}}{2}} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} \Rightarrow a\cos t = \dfrac{a}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}$

U drugoj koordinati imamo izraz $a\sin t$

$$e^{\frac{s}{a}} = \frac{1+\sin t}{\cos t} \Rightarrow 1+\sin t = \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}$$

$$\sin t = \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} - 1$$

Prema tome parametrizacija krive pomoću luka s izgleda

$$\vec{r} = \left(\frac{a}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}},\ a\left(\frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}-1\right),\ a\ln\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}\right)$$

$$\vec{r} = a\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}},\ \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}-1,\ \ln\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}\right)$$

traženo rješenje

(#) Posmatrajmo krivu c datu implicitno sa

$$\vec{r}: \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \\ a\sqrt{b^2-c^2}\,z=c\sqrt{a^2-b^2}\,x \end{cases} \qquad a>b>c.$$

Izračunati njenu dužinu luka i nađite reparametrizaciju dužinom luka.

Rj. -upute

Da bi smo izračunali dužinu luka potrebno je krivu $\vec{r}$ napisati u parametarskom obliku. Napišimo prvo ravan $a\sqrt{b^2-c^2}\,z=c\sqrt{a^2-b^2}\,x$ u parametarskom obliku.

$$a\sqrt{b^2-c^2}\,z=c\sqrt{a^2-b^2}\,x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}}\,x$$

Ako za x uzmemo $x=\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda$ imamo $z=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda$

pa je $\left\{\begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda \\ \mu \\ \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda \end{pmatrix} \middle|\ \lambda,\mu\right\}$ parametarski oblik ravni $a\sqrt{b^2-c^2}\,z=c\sqrt{a^2-b^2}\,x$.

Stavljajući ovo u jednačinu elipsoida dobijamo

$$\lambda^2+\mu^2=b^2 \qquad \text{tj. jednačinu kruga}$$

radijusa b. Parametrizacija kruga je data sa

$$\begin{cases} x(t) = b\cos t \\ y(t) = b\sin t \\ 0 \leq t < 2\pi \end{cases}$$

Pa je parametarski oblik krive $\vec{r}$ dat sa

$$\vec{r}(t): \begin{cases} \dfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos t \\ b\sin t \\ \dfrac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$|\vec{r}\,'(t)|^2 = b^2$, $\quad s = \int_0^s dt = ts$ (mjereno od $s=0$) tako

da je reparametrizacija dužinom luka kruga data sa

$$\vec{r}(s) = \left(\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\frac{s}{b},\ b\sin\frac{s}{b},\ \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\frac{s}{b} \right)$$